

## DISEÑO DE UN PROCEDIMIENTO PARA EL CALCULO DE INCERTIDUMBRE EN MEDICIONES INDIRECTAS

Design of a procedure for the calculation of the uncertainty in indirect measurements

### RESUMEN

De manera didáctica se presenta con base en la norma GTC 51 “Guía para la expresión de incertidumbre en las mediciones” el desarrollo de una metodología para realizar el cálculo de la incertidumbre de medición para el caso en que se realizan mediciones indirectas. Se presenta para un mayor entendimiento una aplicación práctica.

**PALABRAS CLAVES:** Metrología, medición indirecta, incertidumbre, cálculo.

### ABSTRACT

Of didactic way appears with base in GTC-51 norm “Guide for the Expression of Uncertainty in Measurements” the development of a methodology to make the calculation of the uncertainty of measurement for the case in that indirect measurements are made. A practical application appears for a greater understanding.

**KEYWORDS:** *Metrology, indirect measurement, uncertainty, calculation.*

LUIS ENRIQUE LLAMOSAR

Profesor Titular

Facultad de ciencias básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

lellamo@utp.edu.co

JOSÉ DEL C. GÓMEZ E.

Profesor titular

Facultad de ciencias básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

ANDRÉS FELIPE RAMÍREZ B.

Estudiante de ingeniería eléctrica

Facultad de Ingenierías

Universidad Tecnológica de Pereira

## 1. INTRODUCCIÓN

**Medida Indirecta:** Las medidas indirectas son aquellas que son resultado de emplear una expresión matemática que implica operaciones con cantidades físicas que fueron medidas directamente. Entre los casos clásicos para la medición indirecta de variables eléctricas están el de la resistencia eléctrica y el de potencia eléctrica a través de mediciones directas de tensión y corriente eléctricas. La incertidumbre en medidas indirectas proviene necesariamente de la incertidumbre obtenida por medio de las variables involucradas que se midieron por método directo. Contrario al caso de las medidas directas, la determinación de la incertidumbre en medidas indirectas es un proceso más complejo que puede llegar a involucrar aspectos de cálculo diferencial, debido a que es inevitable la presencia de correlaciones entre las variables de entrada.

El lenguaje metrológico utilizado en este artículo es con base en la norma NTC-2194[1].

## 2. DISEÑO DEL PROCEDIMIENTO

A continuación, se irá presentando paso a paso el procedimiento propuesto para la aplicación práctica del Cálculo de la Incertidumbre de Medición en la realización de medidas indirectas. En una primera instancia se describen de manera general los pasos del algoritmo propuesto en esta sección mediante varias secciones de un diagrama de flujo (ver figura 1, 2 y 3)

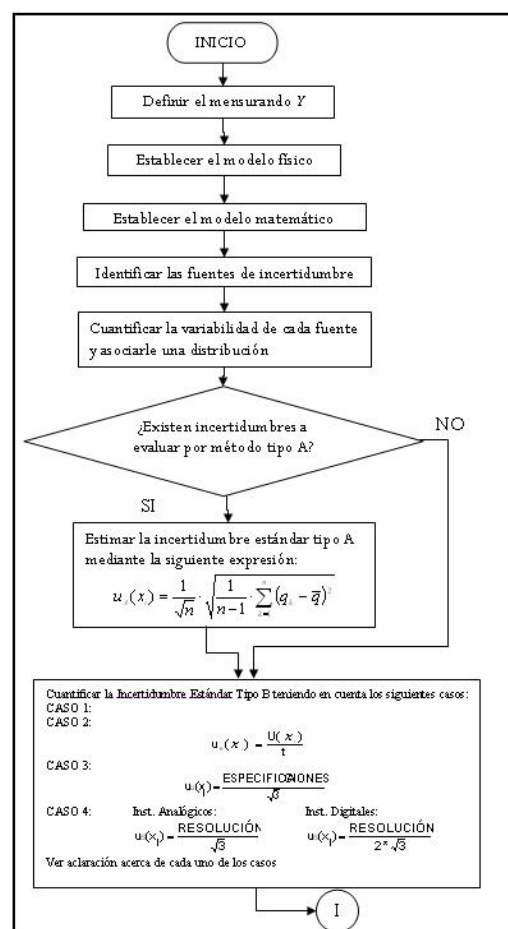


Figura 1. Sección del diagrama de flujo que especifica la metodología a seguir.

Fecha de Recepción: 8 de julio de 2009

Fecha de Aceptación: 25 de julio de 2009

Casos de incertidumbre estándar tipo B (Diagrama de flujo: Figura 1)

CASO 1. Si la incertidumbre de un valor  $x$  se obtiene a partir de la especificación de un fabricante, o de un certificado de calibración, un manual u otra fuente externa al procedimiento de medición en que se indique que este es un múltiplo de la desviación estándar,  $U_x$  se obtiene simplemente de dividir la incertidumbre dada entre el factor multiplicativo.

CASO 2. La especificación de incertidumbre de un elemento de medición se indica respecto de un nivel de confianza (90%, 95%, 99%, etc.) se puede asumir, (salvo indicación contraria), que esta ha sido estimada en base a una distribución normal, por lo tanto podemos hallar la incertidumbre estándar dividiendo por el factor de STUDENT ( $t$ ) correspondiente:

$$u(x_i) = \frac{U(x_i)}{t}$$

CASO 3. La especificación de incertidumbre no es explícita sino que se da un límite máximo para el error del instrumento. Esto implica que el comportamiento del instrumento tiene características de una distribución tipo rectangular o uniforme dentro de unos límites establecidos. Para este tipo de distribución, la incertidumbre estándar se estima así:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{ESPECIFICACIONES}}{2\sqrt{3}}$$

CASO 4. Incertidumbre asociada a la resolución de la indicación de un instrumento de medición. La incertidumbre básica asociada a este problema se puede obtener considerando que la información que se pueda obtener en la porción menos significativa de la indicación de un instrumento, tiene una función de distribución tipo rectangular. En el caso de una indicación digital, la incertidumbre básica corresponde a la sensibilidad del dígito menos significativo, dividido entre dos, y dividida entre la raíz cuadrada de tres:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{RESOLUCIÓN}}{2\sqrt{3}}$$

En el caso de una indicación analógica la incertidumbre básica corresponde a:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{RESOLUCIÓN}}{2\sqrt{3}}$$

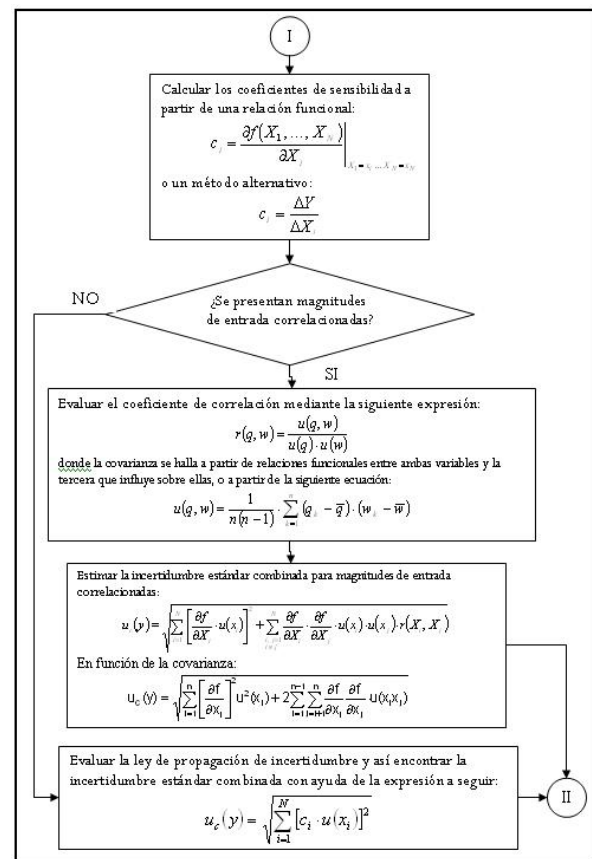


Figura 2. Segunda sección del método.

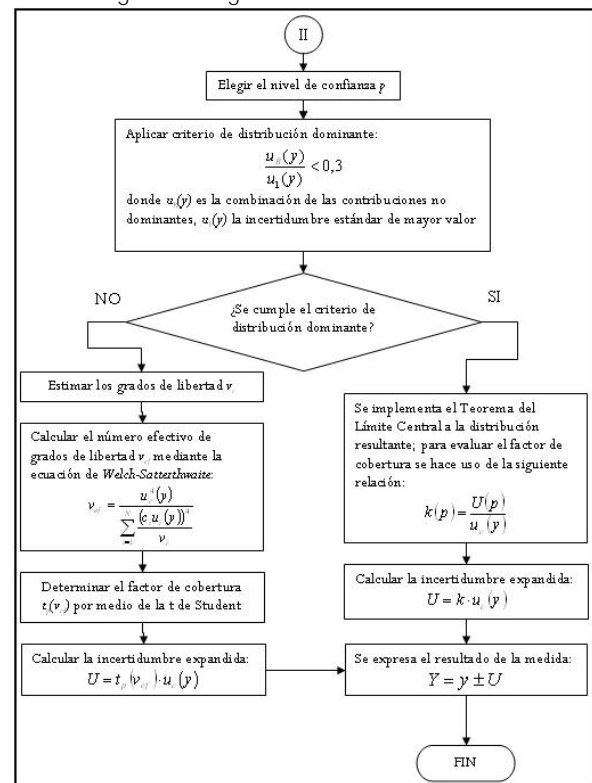


Figura 3. Tercera sección del método.



Luego de despreciar los valores de las contribuciones que no aportan al valor del mensurando, se obtiene entonces la relación de los promedios que se observa, la cual es el mejor estimado para el valor de la resistencia que se está intentando hallar:

$$y = f(x), T_0 = \frac{V}{I} = \frac{5,180000 \text{ V}}{51,891000 \text{ mA}} = 99,806 \Omega \quad (3.2)$$

En el transcurso de los cálculos se sugiere utilizar todas las cifras decimales que presente la herramienta de cálculo para evitar la pérdida de información.

Identificación y cuantificación de las fuentes de incertidumbre: Las fuentes de incertidumbre que se tendrán en cuenta para este problema serán las debidas a la repetibilidad de las lecturas tomadas, las especificaciones de exactitud y la resolución en cada

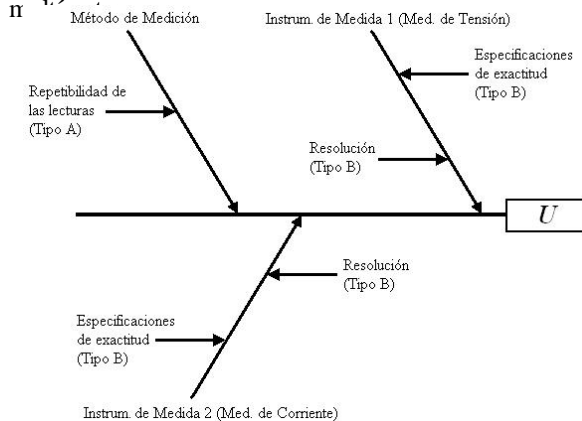


Figura 2. Fuentes de incertidumbre involucradas en el proceso de medición.

Estimación de la incertidumbre tipo A: La desviación estándar<sup>1</sup> de las lecturas tomadas se calcula como se muestra:

$$s(V) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (V_i - 5,180000)^2} = 0,00235 \text{ V} \quad (3.3)$$

$$s(I) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (I_i - 51,891000)^2} = 0,00235 \text{ mA} \quad (3.4)$$

Ahora, calculando la incertidumbre estándar tipo A con las desviaciones anteriores, se tiene:

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} = \frac{0,00235}{\sqrt{10}} = 0,000744 \text{ V} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> En Microsoft Excel, la desviación estándar de una serie de datos se puede obtener por medio de la función 'DESVEST(A:B)', donde 'A:B' es el rango de valores obtenidos en la medición.

$$u_A(I) = \frac{s(I)}{\sqrt{n}} = \frac{0,00235}{\sqrt{10}} = 0,000744 \text{ mA} \quad (3.6)$$

Estimación de las incertidumbres tipo B: Para estimar las incertidumbres estándar tipo B a partir de las fuentes identificadas, hay que observar que se tienen presentes dos casos diferentes: especificaciones y resolución. Las especificaciones de exactitud están bien delimitadas para un valor máximo de error del instrumento, esto implica que el comportamiento de tal instrumento posee propiedades caracterizadas por una distribución uniforme entre límites establecidos, denominada también de tipo rectangular. Para este tipo de distribución de probabilidad la incertidumbre estándar se calcula de la siguiente forma:

$$u_{B1}(V)_{\text{esp}} = \frac{\text{Eso. exactitud}}{\sqrt{3}} = \frac{0,03 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,01732 \text{ V} \quad (3.7)$$

$$u_{B1}(I)_{\text{esp}} = \frac{\text{Eso. exactitud}}{\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,00577 \text{ mA} \quad (3.8)$$

La incertidumbre estándar asociada a la resolución de la indicación de un instrumento de medición se puede obtener considerando que la información contenida en el menor incremento en la escala de la indicación de tal instrumento, posee una función de distribución de tipo rectangular. En el caso de una indicación digital, la incertidumbre estándar asociada corresponde a la mitad de la sensibilidad del dígito menos significativo, dividida entre raíz cuadrada de tres:

$$u_{B2}(V)_{\text{res}} = \frac{\text{resolución}}{\sqrt{3}} = \frac{0,001 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,000577 \text{ V} \quad (3.9)$$

$$u_{B2}(I)_{\text{res}} = \frac{\text{resolución}}{\sqrt{3}} = \frac{0,001 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,000577 \text{ mA} \quad (3.10)$$

Estimación de las incertidumbres combinadas individuales: Después de haber estimado las incertidumbres estándar tipo A y tipo B, se sigue primero con el cálculo de la incertidumbre estándar combinada de cada uno de los parámetros obtenidos a partir de mediciones directas, es decir, de la tensión y la corriente:

$$u_c(V) = \sqrt{u_{A1}^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = \sqrt{(0,000744)^2 + (0,01732)^2 + (0,000577)^2} = 0,018294 \text{ V} \quad (3.11)$$

$$u_c(I) = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2 \cdot u_j^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2 \cdot u_A^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot u_B^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot u_C^2(I)} = \sqrt{1.006477^2 \cdot 0.000477^2 + 49.494^2 \cdot 0.000490^2 + 110.616^2 \cdot 0.000480^2} = 0.233270 \text{ mA} \quad (3.12)$$

Cálculo de los coeficientes de sensibilidad: Los coeficientes de sensibilidad se encuentran de la siguiente manera:

$$c_V = \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{I} \right) = \frac{1}{I} \quad (3.13)$$

$$c_I = \frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{V}{I} \right) = -\frac{V}{I^2} \quad (3.14)$$

Evaluación de la covarianza (para hallar el coeficiente de correlación): Ahora, con el propósito de evaluar la covarianza<sup>2</sup> asociada a la relación existente entre los resultados de las mediciones de las dos magnitudes en cuestión, se utiliza la siguiente expresión:

$$u_c(I) = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2 \cdot u_j^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2 \cdot u_A^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot u_B^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot u_C^2(I)} = \sqrt{10.9^2 \cdot 0.000477^2 + 49.494^2 \cdot 0.000490^2 + 110.616^2 \cdot 0.000480^2} = 0.001106 \text{ V} \cdot \text{mA} \quad (3.15)$$

Estimación de la incertidumbre combinada total: Con este resultado, se tienen ahora todas las contribuciones necesarias para calcular la incertidumbre estándar combinada de las incertidumbres combinadas asociadas a cada una de las mediciones directas, incluyendo la correlación entre ellas:

$$u_c(I) = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2 \cdot u_j^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2 \cdot u_A^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot u_B^2(I) + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot u_C^2(I)} = \sqrt{1.006477^2 \cdot 0.000477^2 + 49.494^2 \cdot 0.000490^2 + 110.616^2 \cdot 0.000480^2} = 0.233270 \text{ mA} \quad (3.16)$$

<sup>2</sup> En Microsoft Excel, la covarianza entre dos magnitudes se puede obtener por medio de la función 'COVAR(A:B;C:D)', dividiendo el resultado entre  $n-1$ , donde "A:B" y "C:D" son los vectores de los valores obtenidos en la medición de cada una de las dos magnitudes, y  $n$  es el número de mediciones por magnitud. Así mismo, el coeficiente de correlación  $r(X_i, X_j)$  se puede encontrar por medio de la función "COEF.DE.CORREL(A:B;C:D)".

Evaluación de aplicación del Teorema del Límite Central: Para conocer si es posible la aplicación del Teorema del Límite Central, se utiliza el criterio de la Distribución Normal (1) (ver figura 3), llamando  $u_1$  a la incertidumbre estándar de mayor magnitud, y llamando  $u_2$  a la combinación de las incertidumbres estándar restantes:

$$u_1 = \sqrt{c_I^2 \cdot u_A^2(I)} = \sqrt{1.006477^2 \cdot 0.000477^2} = 0.000477 \text{ mA} \quad (3.18)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{c_V^2 \cdot u_B^2(I) + c_R^2 \cdot u_C^2(I)}}{u_1} = \frac{\sqrt{49.494^2 \cdot 0.000490^2 + 110.616^2 \cdot 0.000480^2}}{0.000477} = 0.79$$

Estimación de los grados efectivos de libertad: Observando que la relación anterior resulta en un número mayor que 0,3 se dispone entonces a seguir con el proceso normal de evaluación de la incertidumbre expandida evaluando en primer lugar los grados de libertad de cada una de las componentes de las incertidumbres estándar combinadas de las mediciones directas. Por lo tanto, para la incertidumbre estándar tipo A se evaluarán los grados de libertad  $\nu_i$  como  $n-1$ , siendo  $n$  el número de mediciones, y para el caso de la incertidumbre estándar tipo B, se asocian grados de libertad infinitos. Empleando entonces la ecuación de Welch-Satterthwaite (1), se tiene:

$$\nu_{efV} = \frac{u_B^4(I)}{\sum_{j=1}^n \frac{u_j^4(I)}{\nu_j}} = \frac{0.000490^4}{\frac{0.000477^4}{10} + \frac{0.000490^4}{\infty} + \frac{0.000480^4}{\infty}} = 85.02 \approx 85 \quad (3.19)$$

$$\nu_{efI} = \frac{u_A^4(I)}{\sum_{j=1}^n \frac{u_j^4(I)}{\nu_j}} = \frac{0.000477^4}{\frac{0.000477^4}{10} + \frac{0.000490^4}{\infty} + \frac{0.000480^4}{\infty}} = 217.19 \approx 217 \quad (3.20)$$

Ahora, considerando los grados efectivos de libertad encontrados anteriormente a partir de las mediciones directas, se procederá a calcular los grados efectivos de libertad globales por medio de la ecuación de Welch-Satterthwaite que servirán para hallar el factor de cobertura:

<sup>3</sup> Este criterio es extraído del documento de aplicación para laboratorios "EA 4/02 (rev00): Expressions of the Uncertainty of Measurements in Calibration", publicado por la Cooperación Europea para la Acreditación (European co-operation for Accreditation, EA).



$$V_{ef} = \frac{U_c^2(r) \cdot T_p / 0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1}{C_V^2 \cdot U_c^2(V) \cdot T_p / 0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1} + \frac{U_c^2(r) \cdot T_p / 0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1}{C_V^2 \cdot U_c^2(V) \cdot T_p / 0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1}$$

$$= \frac{(0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1)}{(51.891000 \text{ mA})^4 \cdot (0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1)} + \frac{(0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1)}{(51.891000 \text{ mA})^4 \cdot (0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1)}$$

$$= 161.10 \pm 161 \quad (3.21)$$

Cálculo de la incertidumbre expandida: Con este resultado se consulta en la tabla de valores  $t_p(V)$  de la distribución t de Student el valor correspondiente del factor de cobertura con un nivel de confianza del 95%, para hallar posteriormente la incertidumbre expandida de medición. En la tabla, debido a que 161 grados efectivos de libertad es mayor que 100, se eligen infinitos grados que corresponden a un factor de cobertura de 1,960:

$$U = t_p(V) \cdot T_p / 0.4 \cdot 8.371 \cdot T_p / 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 102.48 \cdot 732.69 \cdot T_p / 1 = 161.10 \pm 161$$

#### 4. EXPRESIÓN DEL RESULTADO DE MEDICIÓN

Expresión de la incertidumbre. En la División de Metrología de la Superintendencia de Industria y Comercio y en la mayoría de los laboratorios a nivel nacional, la política común es expresar los resultados de sus mediciones con un nivel de confianza no menor al 95%, en vista de la costumbre en laboratorios similares fuera del país, como en el caso del CENAM de México. Es difícil asegurar un valor preciso de la incertidumbre debido a las múltiples aproximaciones realizadas durante su estimación. Por ello, generalmente los valores de  $t_p(V_{ef})$  para  $p = 95\%$  se aproximan por los que corresponden a  $t_p(V_{ef})$  para  $p = 95.45\%$  con el fin de obtener un valor de  $k = 2.00$  en el límite de una distribución normal (ver tabla distribución *t de student*). La expresión de la incertidumbre expandida  $U$  incluye su indicación como un intervalo centrado en el mejor estimado “ $y$ ” del mensurando, la afirmación de que  $p$  es del 95% (o el valor elegido) aproximadamente y el número efectivo de grados de libertad, cuando sea requerido. Una manera de expresar el resultado de la medición es:

$$Y = y \pm U \quad (4.1)$$

Como recomendación general, los valores numéricos del estimado y su incertidumbre no deben informarse con un número excesivo de dígitos. Es suficiente utilizar dos cifras significativas, redondeando la última cifra hacia el número superior consecutivo, aunque en algunos casos se pueden ofrecer algunos dígitos adicionales para evitar redondeos. Los valores numéricos de los estimados de salida y entrada deben redondearse de modo tal que sean consistentes con sus incertidumbres (por ejemplo, si  $y = 9.069 \text{ 51 F}$ , debido a un valor de  $U = 17 \text{ mF}$ ,  $y$  debe redondearse a  $9.070 \text{ F}$ ). Una vez la incertidumbre haya

sido redondeada, el estimado de medición debe tener las mismas posiciones decimales que su respectiva incertidumbre.

De acuerdo a lo anterior la incertidumbre expandida se redondea a 161 con dos cifras significativas, redondeando la última cifra al mayor número más cercano y la exactitud del mensurando debe ser consistente con tales cifras significativas. Entonces, con un nivel de confianza del 95% y 161 grados efectivos de libertad, el resultado de la medición es:

$$R_x = r_x \pm U = 99.82 \Omega \pm 0.97 \Omega \quad (4.2)$$

#### 5. CONCLUSIONES

Generalmente, en los laboratorios de experimentación tanto de las empresas como de las universidades, se hacen mediciones sin realizar el cálculo de la incertidumbre de medición. En muchos artículos especializados a nivel nacional se puede observar todavía, cómo experimentalistas reportan medidas sin incertidumbre de medición. La mayor parte de la investigación experimental en Colombia adolece de esta falla; las medidas se realizan con instrumentos que se han comprado y nunca más vuelven a ser calibrados. En general, se puede decir que en nuestro país son muy pocos los experimentalistas que saben reportar sus medidas.

Se presentó en este trabajo una aplicación práctica de estimación de la incertidumbre de medición en mediciones indirectas, utilizando la metodología de la norma GTC-51 “Guía para la expresión de Incertidumbre en las Mediciones”[4]. La aplicación presentada se ha desarrollado de manera metodológica de tal manera que el lector pueda implementar este desarrollo en otros tipos de aplicaciones de mediciones directas.

Esperamos que este artículo sirva para crear cultura metrológica entre los experimentalistas.

#### 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Norma NTC 2194: Vocabulario de Términos Básicos y Generales en Metrología. Bogotá D.C.: ICONTEC, 1997.33 p.
- [2] BECERRA, Luis O. Número de Mediciones Necesarias [Archivo PDF en línea]. El Marqués, Querétaro: CENAM, 2004. 5 p. Disponible en Internet: (URL: <http://www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-121.pdf>).
- [3] EUROPEAN CO-OPERATION FOR ACCREDITATION (Francia). EA 4/02: Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration [Archivo PDF en línea]. París: EA, 1999. 79 p. Disponible en Internet: (URL: <http://www.european-accrreditation.org/n1/doc/EA-4-02.pdf>).
- [4] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Norma GTC 51: Guía para la expresión de Incertidumbre en las Mediciones. Bogotá D.C.: ICONTEC, 1997.178 p.